Zadanie 1.

Zmiana systemów.

Zadanie 2.

Szyfr Cezara.

Zadanie 3.

Czy liczba jest doskonała.

Zadanie 4.

Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Zadanie 5.

Schemat Hornera.

Wyjaśnienie:

Zadanie 1.

Pozycyjne reprezentacje liczb

Przedstawimy zamianę z systemu dziesiętnego na dowolny system o podstawie *p*, gdzie

$p \in \{2,3,...,15,16\}$

Rozwiązanie zagadnienia jest analogiczne do zamiany z systemu dziesiętnego na binarny. Liczbę w systemie dziesiętnym skracamy, dzieląc przez podstawę *p* do momentu uzyskania wartości 0. Po prawej stronie wypisujemy reszty z dzielenia przez *p*. Rozwiązaniem będzie spisanie wartości znajdujących się po lewej stronie w odwrotnej kolejności.

Przeanalizujmy kilka przypadków:

zamieńmy liczbę 100 na system trójkowy:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 100 \text{ mod } 3 = 1 \\ 100 \text{ div } 3 = 33 & 33 \text{ mod } 3 = 0 \\ 33 \text{ div } 3 = 11 & 11 \text{ mod } 3 = 2 \\ 11 \text{ div } 3 = 3 & 3 \text{ mod } 3 = 0 \\ 3 \text{ div } 3 = 1 & 1 \text{ mod } 3 = 1 \\ 1 \text{ div } 3 = 0 & \end{array}$$

Następnie spisujemy wynik od końca i otrzymujemy:

$100=(10201)_3$

Przedstawmy teraz liczbę 1201 w systemie szesnastkowym:

$$\begin{array}{r|l} 1201 & 1201 \text{ mod } 16 = 1 \\ 1201 \text{ div } 16 = 75 & 75 \text{ mod } 16 = 11 \text{ (B)} \\ 75 \text{ div } 16 = 4 & 4 \text{ mod } 16 = 4 \\ 4 \text{ div } 16 = 0 & \end{array}$$

Wynik spisujemy od końca i otrzymujemy:

1201=(4*B*1)16

Problem rozwiążemy rekurencyjnie.

Dane wejściowe

Dwie liczby: $n \in N$, oraz $p \in \{2, 3, ..., 16\}$.

Dane wyjściowe

Liczba *n* zapisana w systemie o podstawie *p*.

Zadanie 2.

Zacznijmy od wyjaśnienia idei szyfru Cezara. Jest to jeden z najprostszych szyfrów przesuwających. Polega ona na przesunięciu każdej litery o pewną stałą wartość zwaną kluczem. Prześledźmy przykład:

Zaszyfrujmy słowo Marcin kluczem o wartości równej -2. A więc każdą literę przesuwamy w lewą stronę o dwie wartości:

Przed szyfrowaniem	**Po szyfrowaniu**
M	K
a	y
r	p
c	a
i	g
n	l

Oczywiście szyfrowanie odbywa się w zakresie liter alfabetu łacińskiego. Aby zaszyfrować literę ***a*** należy się cofnąć do końca alfabetu i będzie to litera ***y***:

$$\ldots x \quad \overbrace{y}^{\text{"}a\text{" po zaszyfrowaniu}} \quad z \overbrace{a}^{\overset{\leftarrow}{2}} b\, c \ldots$$

Słowo "**Marcin**" po zaszyfrowaniu wygląda następująco: "**Kypagl**".

Aby zdeszyfrować dane słowo należy przesunąć każdy znak o − *klucz*, czyli w tym przypadku o −(−2)=2.

Szyfr Cezara jest szyfrem **symetrycznym**, ponieważ do szyfrowania i deszyfrowania wykorzystujemy ten sam klucz, dodatkowo jest to szyfr podstawieniowy (litery nie zmieniają swojego położenia, tylko zostają podmienione na inne).

Przeanalizujemy przypadek szyfrowania dużych liter o kluczu z przedziału [−26..26].

Załóżmy, że klucz ma wartość −2. Każdą literę musimy przesunąć o 2 w lewo. Dla liter powyżej litery *B* problem jest trywialny. Dla liter *A* i *B* należy odliczyć odpowiednią liczbę znaków począwszy od *Z* w dół.

Natomiast dla klucza równego 2 aby zaszyfrować literę *Z* musimy przejść do początku alfabetu i tu odliczyć dwa znaki.

Zadanie 3.

Sprawdzanie, czy podana liczba jest doskonała

Liczba doskonała (definicja) to taka liczba naturalna, której suma jej dzielników właściwych (bez niej samej) jest jej równa.

Taką liczbą jest np. 6, ponieważ

*D*6={1,2,3} oraz 6=1+2+3

lub 28

*D*28={1,2,4,7,14} oraz 28=1+2+4+7+14

Kilka kolejnych liczb doskonałych

6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328

Strategia algorytmu

Siłowe rozwiązanie dla liczby **n** polega na sprawdzeniu wszystkich liczb z przedziału [**1..n**] i wyłonieniu z nich tych, które są dzielnikami liczby **n**. Np. dla liczby 28 sprawdzamy kolejno liczby 1, 2, 3, ..., 28 i jeśli któraś dzieli bez reszty liczbę 28, dodajemy ją do sumy dzielników. Dla dużych liczb ten algorytm staje się bardzo powolny. Warto zauważyć, że jeśli znajdziemy jeden dzielnik, to do pary otrzymujemy drugi (wyjątek stanowią liczby kwadratowe), np. dla liczby **28** mamy:

1 oraz 281=28

2 oraz 282=14

4 oraz 284=7

Dalej nie szukamy, ponieważ dzielniki będą się powtarzały. Liczby, które musimy sprawdzić, czy są potencjalnymi dzielnikami będą zawierać się w przedziale [1..[*n*√]], a więc dla liczby 28 jest to [1..[28−−√]]=[1..5]. Dla liczby kwadratowej, jej "środkowy" dzielnik zliczamy tylko raz. Oczywiście dla liczb doskonałych nie bierzemy pod uwagę dzielnika, który jest badaną liczbą.

Zadanie 4.

Zacznijmy od definicji. **Rozkład liczby naturalnej *n>1* na czynniki pierwsze** polega na przedstawieniu jej w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Liczby złożone będą miały co najmniej dwa czynniki pierwsze. **Liczby pierwsze** się nie rozkładają. Problem rozwiążemy sposobem szkolnym. Popatrzmy najpierw na kilka przykładów. Rozłóżmy liczby 24, 100, 1520:

$24=2\cdot2\cdot2\cdot3$

$100=2\cdot2\cdot5\cdot5$

$1520=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot19$

Liczbę do rozłożenia będziemy dzielić przez liczby pierwsze tak długo, aż z liczby rozkładanej zrobi się 1.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1520 & 2 \\ 760 & 2 \\ 380 & 2 \\ 190 & 2 \\ 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

Rozpoczynamy od dwójki - jest to pierwsza liczba pierwsza. Jeśli rozkładana liczba się dzieli to wypisujemy 2 i skracamy naszą liczbę przez 2. Czynność powtarzamy tak długo, jak długo liczba *n* jest podzielna przez 2. W drugim kroku szukamy następnego dzielnika rozkładanej liczby. Będzie to następna liczba pierwsza. Czynności te powtarzamy do momentu uzyskania wartości 1.

Zakładamy, że liczba, która znajdzie się na wejściu będzie większa od jedynki.

Zadanie.5

Schemat Hornera jest algorytmem służącym do bardzo szybkiego obliczania wartości wielomianu. Redukuje on ilość mnożeń do minimum. Przeanalizujmy następujący wielomian:

$$W(x)=3x^3+3x^2-2x+11.$$

Do wyznaczenia wartości wielomianu tradycyjnym sposobem należy wykonać 6 mnożeń:

$$W(x)=3\cdot x\cdot x\cdot x+3\cdot x\cdot x-2\cdot x+11$$

Schematem Hornera tych mnożeń należy wykonać tylko 3:

$$W(x)=3\cdot x3+3x2-2x+11=x\cdot(3\cdot x2+3x-2)+11=x\cdot(x\cdot(3\cdot x+3)-2)+11.$$

a więc mamy:

$$(1) \quad W(x)=x\cdot(x\cdot(3\cdot x+3)-2)+11$$

Dla wielomianu n-tego stopnia zwykle należy wykonać następującą ilość mnożeń (wliczając czynniki):

$$n+(n-1)+(n-2)+...+2+1=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

(suma ciągu arytmetycznego), natomiast dla omawianej metody zaledwie *n* mnożeń.

Jak widać na przykładzie (1) najpierw zaczniemy wykonywać działanie znajdujące się wewnątrz nawiasu:

$$3\cdot x+3$$

Następnie przemnażamy przez wartość argumentu *x*, potem odejmujemy 2 i znów przemnażamy przez *x*. Czynności powtarzamy do momentu obliczenia wartości całego wielomianu.

Danymi wejściowymi będą współczynniki wielomianu oraz jego stopień. Następnie podamy argument, dla jakiego chcemy wyznaczyć wartość wielomianu. Zauważmy, że wielomian, którego stopień jest równy *n* ma *n*+1 czynników.